अध्याय 13 : प्रायिकता
Chapter 13 : Probability

NCERT कक्षा 12 गणित (CG Board) · Concept + Formula Notes · प्रश्नावली 13.1, 13.2, 13.3 + विविध

📌 **Index:** (0) Basics Recap · (1) सप्रतिबंध प्रायिकता Ex 13.1 · (2) गुणन प्रमेय व स्वतंत्र घटनाएँ Ex 13.2 · (3) संपूर्ण प्रायिकता व बेज़ प्रमेय Ex 13.3 · (4) यादृच्छिक चर व माध्य (विविध) · (5) Quick Formula Sheet

0. पिछली कक्षा का Recap (Basics)

- **प्रतिदर्श समष्टि (S)** = सभी संभव परिणामों का समुच्चय। Sample space = set of all possible outcomes.
- **घटना (E)** = S का उपसमुच्चय। Event = subset of S.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \quad , \quad 0 \le P(E) \le 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A') = 1 - P(A) \quad \text{("नहीं" / not)}$$

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$$

🔑 "और / and" → ∩ (सर्वनिष्ठ), "या / or" → ∪ (सम्मिलन)

🎲 पासा = 6 परिणाम, दो पासे = 36 · 🪙 n सिक्के = 2^n · 🃏 ताश = 52 पत्ते (4 सूट × 13), इक्के = 4, चित्र पत्ते (face cards) = 12

1. सप्रतिबंध प्रायिकता Conditional Probability · Ex 13.1

अर्थ: जब यह पता है कि घटना F घट चुकी है, तब E के घटने की प्रायिकता = P(E|F) (पढ़ें: "E दिया है F")

Meaning: probability of E when it is already known that F has occurred.

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \quad P(F) \neq 0$$

$$P(E|F) = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} \quad \text{(समसंभावी परिणामों में / equally likely)}$$

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}, \quad P(E) \neq 0$$

💡 *Trick:* जो घटना "दिया है / given / यदि ज्ञात है" उसी से भाग देते हैं — वही नया sample space बन जाती है।

The given event becomes the new (reduced) sample space.

✍️ सप्रतिबंध प्रायिकता के गुणधर्म (Properties)

① $P(S|F) = P(F|F) = 1$

② $P((A \cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F) - P((A \cap B)|F)$

यदि A, B परस्पर अपवर्जी हैं: $P((A \cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F)$

③ $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

④ $0 \leq P(E|F) \leq 1$

📝 उपयोगी परिणाम (Misc में पूछे जाते हैं):

- यदि $A \subset B$ तो $A \cap B = A \Rightarrow P(A|B) = P(A)/P(B)$ और $P(B|A) = 1$
- यदि A, B **परस्पर अपवर्जी** $(A \cap B = \phi) \Rightarrow P(A|B) = 0$

> **उदाहरण (Ex 13.1, Q1):** $P(E)=0.6$, $P(F)=0.3$, $P(E \cap F)=0.2 \Rightarrow$
> $P(E|F) = 0.2/0.3 = 2/3$, $P(F|E) = 0.2/0.6 = 1/3$

> **Type:** "एक परिवार में 2 बच्चे हैं, कम से कम एक लड़का है, दोनों लड़के होने की प्रायिकता?"
> $S = \{BB, BG, GB, GG\}$, F = कम से कम एक लड़का $= \{BB, BG, GB\}$, $E \cap F = \{BB\}$
> $\Rightarrow P(E|F) = n(E \cap F)/n(F) = 1/3$

2. गुणन प्रमेय व स्वतंत्र घटनाएँ *Multiplication Theorem & Independent Events · Ex 13.2*

✍️ (a) प्रायिकता का गुणन नियम

दो घटनाओं के <u>एक साथ</u> घटने की प्रायिकता: *(probability of E and F both)*

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F|E) = P(F) \cdot P(E|F)$$

$$P(E \cap F \cap G) = P(E) \cdot P(F|E) \cdot P(G|E \cap F)$$

💡 "बिना प्रतिस्थापन / without replacement" वाले प्रश्नों में यही लगता है — हर निकाल के बाद कुल संख्या घटती है।

> **उदाहरण:** थैले में 10 काली, 5 सफ़ेद गेंदें, बिना वापस रखे 2 निकाली, दोनों काली?
>
> $P = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \mathbf{3/7}$

✍️ (b) स्वतंत्र घटनाएँ (Independent Events)

एक घटना के घटने से दूसरी की प्रायिकता पर <u>कोई असर नहीं</u>। Occurrence of one does not affect the other.

$$E, F \text{ स्वतंत्र} \iff P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$$
$$\text{अर्थात् } P(E|F) = P(E) \quad \text{और} \quad P(F|E) = P(F)$$

⭐ यदि E, F स्वतंत्र हैं तो ये जोड़े भी स्वतंत्र हैं: **(E, F'), (E', F), (E', F')**

$$P(E' \cap F') = P(E') \cdot P(F') = (1-P(E))(1-P(F))$$
$$P(\text{कम से कम एक / at least one}) = 1 - P(E')\cdot P(F')$$
$$P(E \cup F) = 1 - P(E')P(F') \quad \text{(स्वतंत्र होने पर)}$$

🔺 **तीन घटनाएँ A, B, C परस्पर स्वतंत्र** (mutually independent) — चारों शर्तें चाहिए:
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$, $P(B\cap C)=P(B)P(C)$, $P(A\cap C)=P(A)P(C)$,
$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

✍️ (c) परस्पर अपवर्जी vs स्वतंत्र — अंतर ❗

परस्पर अपवर्जी (Mutually Exclusive)	स्वतंत्र (Independent)
साथ में घट ही नहीं सकतीं	साथ में घट सकती हैं, पर असर नहीं डालतीं
$A \cap B = \varphi$, $P(A\cap B) = 0$	$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$
$P(A\cup B) = P(A)+P(B)$	$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A)P(B)$
⚠️ अशून्य (non-zero) प्रायिकता वाली दो घटनाएँ **एक साथ** स्वतंत्र और परस्पर अपवर्जी नहीं हो सकतीं।	

> **उदाहरण (Check independence):** 52 पत्तों से एक पत्ता — E = हुकुम (spade), F = इक्का (ace)
>
> $P(E)=13/52=1/4$, $P(F)=4/52=1/13$, $P(E\cap F)=1/52$
>
> $P(E)\cdot P(F) = 1/4 \times 1/13 = 1/52 = P(E\cap F) \Rightarrow$ **स्वतंत्र** ✔

> **Type:** A के हल करने की प्रायिकता 1/2, B की 1/3 (स्वतंत्र)। प्रश्न हल होने की प्रायिकता?
>
> $P(\text{हल}) = 1 - P(A')P(B') = 1 - (1/2)(2/3) = \mathbf{2/3}$

3. संपूर्ण प्रायिकता व बेज़ प्रमेय Total Probability & Bayes' Theorem · Ex 13.3

✍️ (a) प्रतिदर्श समष्टि का विभाजन (Partition)

$E_1, E_2, ..., E_n$, S का विभाजन है यदि — a partition of S if:

- युग्मतः असंयुक्त: $E_i \cap E_j = \varphi$ $(i \neq j)$ pairwise disjoint
- संपूर्ण: $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ exhaustive
- $P(E_i) > 0$ सभी i के लिए

✍️ (b) संपूर्ण प्रायिकता प्रमेय (Theorem of Total Probability)

$$P(A) = P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2) + ... + P(E_n)P(A|E_n)$$
$$P(A) = \Sigma\, P(E_j) \cdot P(A|E_j)$$

👉 जब परिणाम A "कई रास्तों" से आ सकता है (कई थैले, कई मशीनें) — तो **हर रास्ते की प्रायिकता जोड़ो।**

✍️ (c) बेज़ प्रमेय (Bayes' Theorem) ⭐⭐

परिणाम A हो चुका है, अब पीछे जाकर पूछना कि वह **किस कारण E_i** से हुआ। Reverse / "posterior" probability — find the cause after seeing the result.

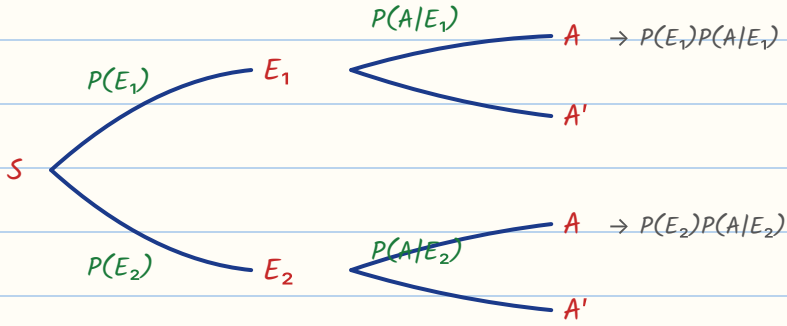
$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i) \cdot P(A|E_i)}{\Sigma_j\, P(E_j) \cdot P(A|E_j)}$$

दो कारण हों तो: $P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1) + P(E_2)P(A|E_2)}$

📖 शब्दावली: $P(E_i)$ = **पूर्व प्रायिकता** (prior / a priori) · $P(E_i|A)$ = **पश्च प्रायिकता** (posterior) · E_i = **परिकल्पनाएँ** (hypotheses)

✍️ Bayes प्रश्न हल करने के Steps

1. घटनाएँ लिखो: E_1, E_2, E_3 (कारण) और A (दिया गया परिणाम)
2. $P(E_1), P(E_2)$... लिखो (जोड़ = 1 ✔)
3. $P(A|E_1), P(A|E_2)$... लिखो
4. हर गुणनफल $P(E_i)P(A|E_i)$ निकालो → जोड़ = हर (denominator)
5. जिसका पूछा उसका गुणनफल ÷ जोड़



Tree diagram: हर शाखा की प्रायिकताओं का गुणा, फिर A वाली शाखाओं का जोड़।

> **उदाहरण (Ex 13.3, Q1):** थैला I: 3 लाल, 4 काली · थैला II: 5 लाल, 6 काली। एक थैला यादृच्छया चुनकर गेंद निकाली — लाल निकली। थैला II से होने की प्रायिकता?
>
> E_1, E_2 = थैला I, II चुनना ⇒ $P(E_1)=P(E_2)=1/2$ · A = लाल गेंद
>
> $P(A|E_1)=3/7,\ P(A|E_2)=5/11$
>
> $$P(E_2|A) = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{11}} = \frac{35/77}{68/77} = \mathbf{35/68}$$

📌 Ex 13.3 के common types: 2–3 थैले/कलश · फैक्ट्री की मशीनें (% उत्पादन, % ख़राब) · खून/मेडिकल टेस्ट (false positive) · सच बोलना (truth-telling) · बीमा (scooter, car, truck drivers)

⚠ "%" को हमेशा भिन्न में बदलो: 25% = 0.25, 5% = 0.05

4. यादृच्छिक चर व प्रायिकता बंटन *Random Variable & Probability Distribution · Misc*

यादृच्छिक चर X = ऐसा फलन जो प्रत्येक परिणाम को एक वास्तविक संख्या देता है। *A real-valued function on the sample space.*

उदा.: दो सिक्के उछालें, X = चितों (heads) की संख्या ⇒ X = 0, 1, 2

X	0	1	2
P(X)	1/4	1/2	1/4

शर्तें: $0 \le p_i \le 1$ **और** $\Sigma p_i = 1$

माध्य / प्रत्याशा (Mean / Expectation): $\mu = E(X) = \Sigma x_i p_i$

ऊपर के उदाहरण में: $E(X) = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = 1$

💡 "k ज्ञात करो" वाले प्रश्न: $\Sigma P(X) = 1$ रखकर k निकालो, फिर ऋणात्मक मान अस्वीकार करो।

✏ **अतिरिक्त (पुरानी किताब / अपने शिक्षक से पुष्टि करें):**

प्रसरण $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, मानक विचलन $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

द्विपद बंटन: $P(X = r) = {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$, $q = 1 - p$, माध्य $= np$, प्रसरण $= npq$

Variance & Binomial distribution are trimmed in the current rationalised book — check your CG Board syllabus.

5. Quick Formula Sheet ✍ (परीक्षा से पहले दोहराएँ)

Concept	Formula
सप्रतिबंध प्रायिकता	$P(E\|F) = P(E\cap F) / P(F)$
पूरक (conditional)	$P(E'\|F) = 1 - P(E\|F)$
गुणन प्रमेय	$P(E\cap F) = P(E)\cdot P(F\|E)$
तीन घटनाएँ	$P(E\cap F\cap G) = P(E)P(F\|E)P(G\|E\cap F)$
स्वतंत्र घटनाएँ	$P(E\cap F) = P(E)\cdot P(F)$
कम से कम एक	$1 - P(E')P(F')$
संपूर्ण प्रायिकता	$P(A) = \Sigma\, P(E_j)P(A\|E_j)$
बेज़ प्रमेय	$P(E_i\|A) = P(E_i)P(A\|E_i) / \Sigma\, P(E_j)P(A\|E_j)$
प्रायिकता बंटन	$\Sigma\, p_i = 1$
माध्य	$E(X) = \Sigma\, x_i\, p_i$

🎯 कौन सा सूत्र कब? (Identify the question)

- "दिया है / यदि ज्ञात है / given that" → **सप्रतिबंध**
- "दोनों / एक के बाद एक / बिना प्रतिस्थापन" → **गुणन प्रमेय**
- "प्रतिस्थापन सहित / अलग-अलग व्यक्ति / स्वतंत्र" → **$P(A)\cdot P(B)$**
- "कुल प्रायिकता कि परिणाम आए" → **संपूर्ण प्रायिकता**
- "परिणाम आ गया, किस थैले/मशीन/कारण से?" → **बेज़ प्रमेय**
- "X का बंटन / माध्य / k का मान" → **यादृच्छिक चर**

~ All the best! शुभकामनाएँ 🌟 ~